

第五章 线性系统的频域分析法

一、频率特性

四、稳定裕度

二、开环系统的典型环节分解
和开环频率特性曲线的绘制

五、闭环系统的频域性能指标

三、频率域稳定判据

本章主要内容:

1 控制系统的频带宽度

2 系统带宽的选择

3 确定闭环频率特性的图解方法

4 闭环系统频域指标和时域指标的转换

五、闭环系统的频域性能指标

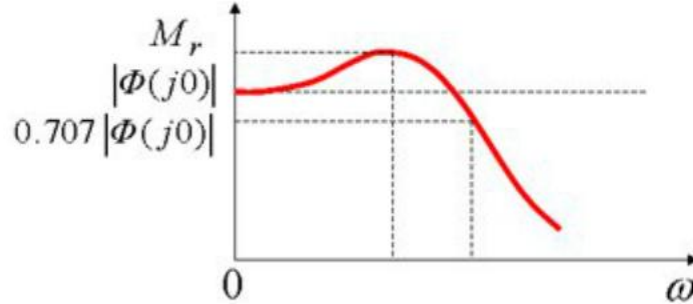
1 控制系统的频带宽度

1 频带宽度

当闭环幅频特性下降到频率为零时的分贝值以下 3 分贝时，对应的频率称为带宽频率，记为 ω_b 。即当 $\omega > \omega_b$

$$20 \lg |\Phi(j\omega)| < 20 \lg |\Phi(j0)| - 3$$

而频率范围 $(0, \omega_b)$ 称为系统带宽。



根据带宽定义，对高于带宽频率的正弦输入信号，系统输出将呈现较大的衰减，因此选取适当的带宽，可以抑制高频噪声的影响。但带宽过窄又会影响系统正弦输入信号的能力，降低瞬态响应的速度。因此在设计系统时，对于频率宽度的确定必须兼顾到系统的响应速度和抗高频干扰的要求。

2、I 型和 II 型系统的带宽

一阶系统的闭环传函为 $\Phi(s) = \frac{1}{Ts+1}$

因为开环系统为 I 型，

所以 $20 \lg |\Phi(j\omega_b)| = 20 \lg 1 / \sqrt{1+T^2\omega_b^2} = 20 \lg \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\text{带宽频率为 } \omega_b = 1/T$$

二阶系统的闭环传函为

$$\Phi(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

系统幅频特性 $|\Phi(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega^2/\omega_n^2}}$

因为 $|\Phi(j0)| = 1$ ，得 $\sqrt{(1-\omega_b^2/\omega_n^2)^2 + 4\zeta^2\omega_b^2/\omega_n^2} = \sqrt{2}$

$$\omega_b = \omega_n [(1-2\zeta^2) + \sqrt{(1-2\zeta^2)^2 + 1}]^{\frac{1}{2}}$$

2、系统带宽的选择

由于系统会受到多种非线性因素的影响，系统的输入和输出端不可避免的存在确定性扰动和随机噪声，因此控制系统的带宽的选择需综合考虑各种输入信号的频率范围及其对系统性能的影响，即应使系统对输入信号具有良好的跟踪能力和对扰动信号具有较强的抑制能力。

总而言之，系统的分析应区分输入信号的性质、位置，根据其频谱或谱密度以及相应的传递函数选择合适带宽，而系统设计主要是围绕带宽来进行的。

3、确定闭环频率特性的图解方法

1、尼科尔斯图线

设开环和闭环频率特性为

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

$$\Phi(j\omega) = M(\omega)e^{j\alpha(\omega)} = \frac{A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}{1 + A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}}$$

简记 $M(\omega)$, $A(\omega)$, $\alpha(\omega)$, 和 $\varphi(\omega)$ 为 M , A , α 和 φ , 得

$$Me^{j(\alpha-\varphi)} + MAe^{j\alpha} = A$$

$$M \cos(\alpha-\varphi) + jM \sin(\alpha-\varphi) + MA \cos\alpha + jMA \sin\alpha = A$$

由等式两端虚部相等关系得

$$20 \lg A = 20 \lg \frac{\sin(\varphi-\alpha)}{\sin \alpha}$$

设 $\alpha(\omega)$ 为常数, 在 $20 \lg A(\omega) - \alpha(\omega)$ 平面上得到等 α 曲线。等 $-\alpha$ 曲线和等 α 曲线关于 φ 的 -180° 轴对称。

$$\text{又知 } \Phi(j\omega) = Me^{j\alpha} = \frac{Ae^{j\varphi}}{1 + Ae^{j\varphi}} = \left(\frac{e^{-j\varphi}}{A} + 1\right)^{-1}$$

$$\text{按欧拉公式有 } Me^{j\alpha} = \left(\frac{\cos \varphi}{A} - j \frac{\sin \varphi}{A} + 1\right)^{-1}$$

进一步化简得

$$20 \lg A = 20 \lg \frac{\cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

$$A = \frac{\cos \varphi \pm \sqrt{\cos^2 \varphi + M^{-2} - 1}}{M^{-2} - 1}$$

取 M 为某一常数, 令 φ 从 $0^\circ : -360^\circ$ 变化, 在 $20 \lg A - \varphi$ 平面上得到一条等 M 线, 变动 M , 则得到等 M 线簇。等 M 线关于 φ 的 -180° 线轴对称。

等 α 线簇和等 M 线簇统称为尼科尔斯图线。

4、闭环系统频域指标和时域指标的转换

工程中常用根据相角裕度 γ 和截止频率 ω_c 估算时域指标的两种方法。

相角裕度 γ 表明系统的稳定程度, 而系统的稳定程度直接影响时域指标 $\sigma\%$ 、 t_s 。

1、系统闭环和开环频域指标的关系

系统开环指标截止频率 ω_c 与闭环带宽 ω_b 有着密切的关系。对于两个稳定程度相仿的系统, ω_c 大的系统, ω_b 也大; ω_c 小的系统, ω_b 也小。

因此 ω_c 和系统响应速度存在正比关系, ω_c 可用来衡量系统的响应速度。又由于闭环振荡性指标谐振 M_r 和开环指标相角裕度 γ 都能表征系统的稳定程度。

系统开环相频特性可表示为

$$\varphi(\omega) = -180^\circ + \gamma(\omega)$$

所以开环频率特性可表示为

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{-j[180^\circ - \gamma(\omega)]} = A(\omega)[- \cos \gamma(\omega) - j \sin \gamma(\omega)]$$

闭环幅频特性

$$M(\omega) = \left| \frac{G(j\omega)}{1+G(j\omega)} \right| = \frac{1}{\sqrt{[1/A(\omega) - \cos \gamma(\omega)]^2 + \sin^2 \gamma(\omega)}}$$

一般，在 $M(\omega)$ 的极大值附近， $\gamma(\omega)$ 变化较小，且使 $M(\omega)$ 为极值的谐振频率常在 ω_c 附近，即有

$$\cos \gamma(\omega_r) \approx \cos \gamma(\omega_c) = \cos \gamma$$

当 $A(\omega) = \frac{1}{\cos \gamma(\omega)}$ 时， $M(\omega)$ 为极值，谐振峰值为

$$M_r = M(\omega_r) = \frac{1}{|\sin \gamma(\omega_r)|} \approx \frac{1}{|\sin \gamma|}$$

在较小时，上式的近似程度较高。

2、开环频域指标和时域指标的关系

典型二阶系统开环传递函数为

2、开环频域指标和时域指标的关系

典型二阶系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{s(Ts+1)} = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\zeta\omega_n)}$$

可求得 $\frac{\omega_c}{\omega_n} = \left(\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2 \right)^{1/2}$

相角裕度可求得

$$\gamma = \arctg \left[2\zeta \left(\frac{1}{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2} \right)^{1/2} \right]$$

对于二阶系统，一般要求：

$$30^\circ < \gamma < 70^\circ \Leftrightarrow 0.27 < \zeta < 0.8$$

估算时域指标方法：

(1) 从开环对数频率特性曲线确定相角裕度

(2) 根据 γ 查对应的 ζ

(3) 由 ζ 查得 $\sigma\%$ ；由 $\omega_n t_s = 3.5/\zeta$ 求 $\omega_n t_s$

$$t_s = \frac{\omega_n t_s}{\omega_n}$$

例1: 已知单位反馈系统开环传递函数为

$$G(s) = \frac{K}{(1+0.1s)(1+0.5s)(1+s)}$$

试求当K为何值时，闭环系统稳定。

解: 设 $T_1 = 0.1, T_2 = 0.5, T_3 = 1$

则系统与实轴交点为

$$\omega = \sqrt{\frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3}}$$

该点的开环传函的虚部为

$$X(\omega) = \frac{-KT_1 T_2 T_3}{T_1^2(T_2 + T_3) + T_2^2(T_1 + T_3) + T_3^2(T_1 + T_2) + 2T_1 T_2 T_3}$$

由奈氏判据知闭环系统稳定的条件为:

$$\frac{KT_1 T_2 T_3}{T_1^2(T_2 + T_3) + T_2^2(T_1 + T_3) + T_3^2(T_1 + T_2) + 2T_1 T_2 T_3} < 1$$

带入数值得

$$\frac{K \times 0.1 \times 0.5 \times 1}{0.1^2 \times 1.5 + 0.5^2 \times 1.1 + 0.6 + 2 \times 0.1 \times 0.5} < 1$$

求得 $K < 19.8$

故闭环系统当 $K < 19.8$ 时稳定。

例2 已知一单位反馈系统，其开环传函为

$$G(s) = \frac{K}{s-1}$$

试用奈氏判据判定系统稳定性

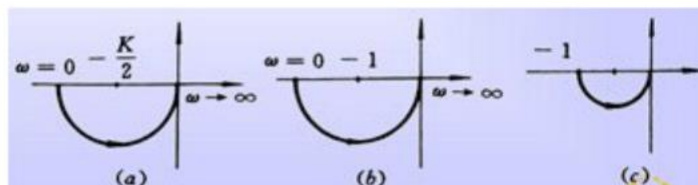
$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega - 1} = \frac{K}{\omega^2 + 1} - j \frac{\omega K}{\omega^2 + 1}$$

当 $\omega = 0$ 时, $x = -K$ $y = 0$
 当 $\omega \rightarrow \infty$ 时, $x = 0$ $y = 0$

奈氏曲线是以点 $(-\frac{K}{2}, 0)$ 为圆心, $\frac{K}{2}$ 为半径的圆, 如下张图 (a) 所示。

当 $K > 1$ 时, 奈氏曲线逆时针包围点 $(-1, j0)$ 半圈, 开环传递函数右半平面有一个极点。根据奈氏判据 $P=1, N=1/2, Z=P-2N$, 系统稳定。

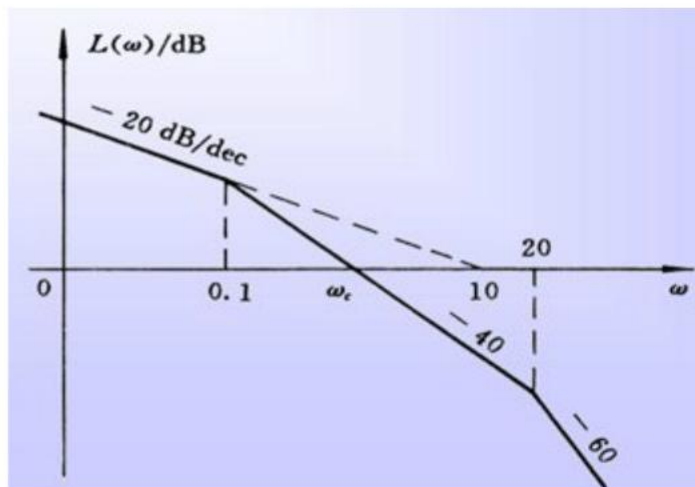
当 $K < 1$ 时, 奈氏曲线逆时针不包围点 $(-1, j0)$, 但有一个极点, 系统不稳定。奈氏曲线如下。



例3 某最小相角系统的开环对数幅频特性如图所示。

要求:

- (1) 写出系统开环传递函数;
- (2) 利用相位裕量判断系统稳定;
- (3) 将其对数幅频特性向右平移十倍频程, 试讨论对系统性能的影响



解: (1) 由系统开环对数幅频特性曲线可知, 系统存在两个交接频率 0.1 和 20, 故

$$G(s)H(s) = \frac{K}{s(\frac{1}{0.1}s + 1)(\frac{1}{20}s + 1)}$$

且 $20 \lg \frac{K}{10} = 0$

得 $K = 10$

所以 $G(s)H(s) = \frac{10}{s(\frac{1}{0.1}s + 1)(\frac{1}{20}s + 1)}$

(2) 系统开环对数幅频特性为

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{10}{\omega} & \omega < 0.1 \\ 20 \lg \frac{1}{\omega^2} & 0.1 < \omega < 20 \\ 20 \lg \frac{20}{\omega^3} & \omega \geq 20 \end{cases}$$

从而解得 $\omega_c = 1$

系统开环对数相频特性为

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - \arctg \frac{\omega}{0.1} - \arctg \frac{\omega}{20}$$

$$\varphi(\omega_c) = -177.15^\circ$$

$$\gamma = 180^{\circ} + \varphi(\omega_c) = 2.85^{\circ}$$

故系统稳定。

(3) 将系统开环对数幅频特性向右平移十倍程，可得系统新的开环传递函数

$$G_1(s)H_1(s) = \frac{100}{s(s+1)\left(\frac{1}{200}s+1\right)}$$

其截止频率 $\omega_{c1} = 10\omega_c = 10$

而

$$\begin{aligned} \varphi_{G_1H_1}(\omega_{c1}) &= -90^{\circ} - \arctg\omega_{c1} - \arctg(\omega_{c1}/200) = -177.15^{\circ} \\ \gamma_1 &= 180^{\circ} + \varphi_{G_1H_1}(\omega_{c1}) = 2.85^{\circ} \\ \gamma_1 &= \gamma \end{aligned}$$

系统的稳定性不变

由时域估计指标公式 $t_s = K\pi / \omega_c$

得 $t_{s1} = 0.1t_s$

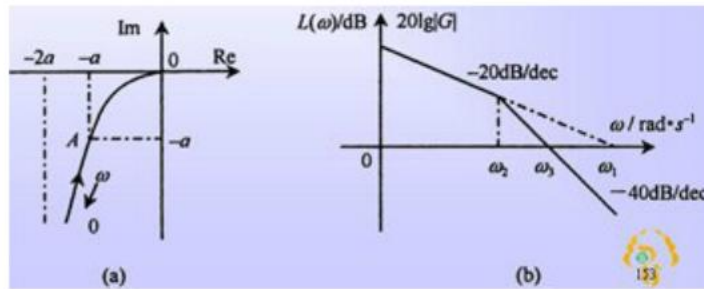
即调节时间缩短，系统动态响应加快。由

$$\sigma = 0.16 + 0.4 \left(\frac{1}{\sin \gamma} - 1 \right)$$

得 $\sigma_1 = \sigma$

即系统超调量不变。

例 4 已知单位反馈系统得开环频率特性如下图(a)、(b)所示，图(a)中，A点对应的频率 $\omega = 2\text{rad/s}$ ，a为大于零的常数，求 ω_1 ， ω_2 ， ω_3 及闭环系统的阻尼比和无阻尼自然振荡频率。



解: 由图 (b) 得

$$G(j\omega) = \frac{\omega_1}{j\omega(\frac{j\omega}{\omega_2} + 1)} = -\frac{\frac{\omega_1}{\omega_2}\omega + j\omega_1}{\frac{\omega^3}{\omega_2^2} + \omega} = u(\omega) + jv(\omega)$$

$$u(\omega) = \frac{-\omega_1/\omega_2}{1 + \omega^2/\omega_2^2}$$

当 $\omega = 0, \omega = 2$ 时, 分别有

$$-\frac{\omega_1}{\omega_2} = -2\alpha, \quad -\frac{\omega_1/\omega_2}{1 + 4/\omega_2^2} = -\alpha$$

可解得

$$\omega_1 = 4\alpha, \quad \omega_2 = 2$$

$$\text{所以 } G(s) = \frac{4\alpha}{s(0.5s + 1)}$$

$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg \frac{4\alpha}{\omega} & (\omega < 2) \\ 20 \lg \frac{4\alpha}{\omega \times 0.5\omega} & (\omega > 2) \end{cases}$$

可解得

$$\omega_3 = \sqrt{8\alpha}$$

$$\Phi(s) = \frac{8\alpha}{s^2 + 2s + 8\alpha}$$

$$\omega_n = \sqrt{8\alpha}, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{8\alpha}}$$